

Дослідження/

Леонід Долінський

Кандидат економічних наук,
доцент, докторант кафедри
економіко-математичного
моделювання Київського
національного економічного
університету імені Вадима Гетьмана



Моделювання узагальненого кредитного рейтингу для групи гомогенних об'єктів

У статті розглянуто комбінаторну задачу розподілу нерозрізаних, невпорядкованих об'єктів рейтингування за розрізненими рівнями національної рейтингової шкали. Побудовано ймовірнісні моделі оцінювання узагальненого кредитного рейтингу для сукупності гомогенних об'єктів рейтингування. Ці моделі становлять науковий та практичний інтерес при оцінюванні інвестиційної привабливості та кредитної якості таких об'єктів рейтингування, як певні галузі промисловості, сектори економіки та сегменти ринку.

Нещодавно Державна комісія з цінних паперів та фондового ринку України внесла на обговорення проект “Стратегії розвитку фондового ринку України на середньострокову та довгострокову перспективу” (до 2015 р.). На думку багатьох фахівців, до безумовних переваг цього проекту належать заходи, покликані підвищити інформаційну прозорість національного ринку цінних паперів. Важливу роль у поліпшенні транспарентності відіграють, зокрема, незалежні рейтингові агентства та система визначення й оприлюднення рейтингових оцінок.

На сьогодні в Україні в межах чинної нормативно-правової бази вже впроваджено певну систему рейтингової оцінки позичальників та боргових інструментів – це кредитні рейтинги [1].

Відповідно до Закону України “Про державне регулювання ринку цінних паперів України” [2] **кредитний рейтинг** – це умовний вираз кредитоспроможності об'єкта рейтингування в цілому та/або його окремого боргового зобов'язання за національною шкалою кредитних рейтингів.

Правові аспекти рейтингування в Україні розглянуто у праці автора [4]. У цій статті зосередимося саме на економіко-математичних аспектах визначення рейтингових оцінок.

Зазначимо, що ця стаття є продовженням публікацій результатів авторських досліджень у сфері моделювання кредитних рейтингів. У попередніх працях [5–6] на основі сценарно-ймовірнісного та комбінаторного підходів було розглянуто питання визначення ймовірностей присвоєння певних рівнів кредитних рейтингів та оцінювання відповідних ймовірностей дефолтів як для окремих об'єктів рейтингування, так і для сукупностей об'єктів.

Загальноприйнята процедура кредитного аналізу для такої сукупності об'єктів як, наприклад, фінансово-промислова чи торговельно-виробнича група компаній передбачає складання консолідованої фінансової звітності та вивчення усереднених показників діяльності. Цей підхід є вельми трудомістким, неоднозначним і при цьому зазвичай не забезпечує достовірного результату оцінювання внаслідок втрати значної частини важливих індивідуальних показників окремих об'єктів.

У межах моделювання рейтингових оцінок у попередній статті [6] було запропоновано принципово інший підхід до аналізу кредитоспроможності групи компаній, сутність якого полягає у визначенні **узагальненого кредитного рейтингу** як інтегрального показника, який певним

чином об'єднує **індивідуальні рейтинги** об'єктів, що входять до цієї групи. Такий підхід дає змогу врахувати надійність кожного індивідуального об'єкта та підвищити завдяки цьому достовірність результатів рейтингування. Причому присвоєння об'єкту будь-якого індивідуального кредитного рейтингу розглядається як випадкова подія, тобто оцінюються ймовірності потрапляння цього рейтингу до того чи іншого рівня рейтингової шкали. Тоді задача визначення узагальненого кредитного рейтингу для групи об'єктів може бути розв'язана методами комбінаторики, шляхом моделювання всіх можливих варіантів розподілу їхніх індивідуальних кредитних рейтингів за рівнями національної рейтингової шкали. Далі, застосувавши сценарно-ймовірнісне моделювання, можемо визначити ймовірності присвоєння того чи іншого рівня узагальненого кредитного рейтингу групі об'єктів рейтингування. Такий авторський логіко-ймовірнісний підхід на противагу ustalеним дає змогу формалізувати процедуру визначення узагальнених кредитних рейтингів, а отже – й зменшити суб'єктивізм під час присвоєння рейтингів, який притаманний, наприклад, спеціалізованим рейтинговим агентствам.

Метою нашого дослідження є ви-

світлення питання моделювання узагальнених кредитних рейтингів для сукупності об'єктів рейтингування. Зрозуміло, що об'єднання об'єктів рейтингування повинно відбуватися з дотриманням принципів здорового глузду та економічної раціональності. Отже, розглядатимемо лише ті сукупності об'єктів рейтингування, об'єднання яких є можливим, наприклад:

- підприємства, які входять до складу фінансово-промислової групи;
- підприємства, які разом визначають загальні тенденції галузі;
- підприємства, які разом визначають фінансово-господарське становище місцевої та/або територіальної громади;
- подібні за змістом боргові зобов'язання, сукупність яких утворює домінуючу частку певного сегмента фондового ринку або становить мажоритарну частину певного кредитно-інвестиційного портфеля тощо.

Перелік таких об'єктів рейтингування у вибірці з часом може переглядатися, але вважатимемо, що на момент оцінювання обрана сукупність об'єктів відповідає зазначеним вище критеріям відбору, отже, її можна розглядати як групу об'єктів, для якої необхідно визначити узагальнений кредитний рейтинг.

ОСНОВНІ ДЕФІНІЦІЇ

Задача оцінювання узагальненого кредитного рейтингу потребує введення умовних позначень, прийняття певної системи гіпотез та відповідних обмежень. Використовуватимемо ті ж дефініції, які було прийнято у попередній праці [6].

Отже, нехай є множина об'єктів рейтингування, загальна кількість яких дорівнює N . Кредитні рейтинги присвоюють за національною шкалою, загальна кількість рівнів рейтингу за якою дорівнює n , причому перший рівень рейтингу означає найвищу, а n -ий – найнижчу кредитоспроможність.

Оскільки кожний j -тий об'єкт рейтингування ($j = \overline{1, N}$) може отримати будь-який i -тий рівень рейтингу ($i = \overline{1, n}$), то кожний індивідуальний рейтинг H_{ij} визначатиметься вектором-стовпчиком ймовірностей P_{ij} . Тоді множина елементарних подій $\{\Omega\}$ щодо можливих результатів рейтингування об'єктів у контексті ймовірностей присвоєння того чи іншого рівня рейтингу описуватиметься матрицею ймовірностей R , розмірністю

$n \times N$, тобто:

$$R = \begin{pmatrix} P_{11} \dots P_{1j} \dots P_{1N} \\ \dots \dots \dots \\ P_{n1} \dots P_{nj} \dots P_{nN} \end{pmatrix}.$$

Користуючись властивістю повної групи подій щодо присвоєння рівнів кредитного рейтингу, для кожного окремого об'єкта рейтингування можемо записати:

$$\forall j: \sum_{i=1}^n P_{ij} = 1. \quad (1)$$

Отже, у кожному стовпчику матриці R сума значень ймовірностей дорівнюватиме одиниці.

КОМБІНАТОРНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЕЙТИНГУ ЗА РОЗРІЗНЕНОСТІ ОБ'ЄКТІВ РЕЙТИНГУВАННЯ

У статті [6] за допомогою методів комбінаторики було проаналізовано всі можливі сполучення щодо розподілу N -розрізних об'єктів рейтингування за n -розрізненими рівнями рейтингової шкали. Було доведено, що множина елементарних подій $\{\Omega\}$ щодо можливих результатів рейтингування об'єктів матиме таку потужність:

$$L(n, N) = n^N. \quad (2)$$

Така велика кількість сполучень індивідуальних рейтингів за рівнями національної шкали робить задачу визначення узагальненого кредитного рейтингу дуже трудомісткою. Наприклад, за об'єктивної наявності 10 основних рівнів національної рейтингової шкали (див. Постанову Кабінету Міністрів України "Про затвердження Національної рейтингової шкали" [3]), навіть без урахування проміжних рівнів кредитних рейтингів, взявши лише 5 підприємств, що входять до цієї групи, за формулою (2) отримаємо результат, згідно з яким загальна кількість варіантів сполучень рівнів їхніх кредитних рейтингів становитиме $10^5 = 100\,000$.

Позбутися такої масштабності задачі визначення узагальненого кредитного рейтингу у статті [6] вдалося шляхом введення до матриці ймовірностей R середніх значень по рядках матриці, тобто середніх ймовірностей \bar{P}_i потрапляння об'єктів до i -тих рівнів рейтингу, $i = \overline{1, n}$. Це дало змогу перейти від комбінаторного методу розв'язання задачі до сценарно-ймовірнісного підходу шляхом застосування мультиноміального зако-

ну розподілу індивідуальних кредитних рейтингів. Такий підхід дав змогу суттєво знизити трудомісткість розрахунків, тому він є зручнішим у практичному застосуванні.

КОМБІНАТОРНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЕЙТИНГУ ЗА НЕРОЗРІЗНОСТІ ОБ'ЄКТІВ РЕЙТИНГУВАННЯ

У межах нашого дослідження пропонуємо використати інший підхід до розв'язання задачі визначення узагальненого кредитного рейтингу, який ґрунтується на тих же дефініціях, але дає змогу значно зменшити потужність множини щодо можливих результатів рейтингування об'єктів, отже й суттєво спростити задачу.

Аналіз можливих об'єднань об'єктів рейтингування свідчить про те, що такі сукупності можуть бути більше або менше однорідними. Наприклад, вертикально-інтегровані холдинги зазвичай передбачають наявність головної (управляючої) компанії, фінансово-господарський стан якої може суттєво відрізнитися від стану деяких інших компаній групи. Водночас до складу горизонтально-інтегрованих та диверсифікованих видів холдингів можуть входити однотипні підприємства. Розглядаючи котирування та обіг боргових цінних паперів, теж можемо зауважити значну кількість подібних за основними ринковими параметрами інструментів.

Зробимо припущення, що сукупність, якій необхідно присвоїти узагальнений кредитний рейтинг, складається з *гомогенних*, тобто однорідних за властивостями об'єктів. Для такої групи можна прийняти гіпотезу про *нерозрізненість* об'єктів рейтингування.

Тоді для визначення узагальненого кредитного рейтингу несуттєвим стає не лише порядок присвоєння об'єктам індивідуальних рейтингів (так звана "непорядкована множина"), а й несуттєвою є інформація про те, яким саме об'єктам присвоєно той чи інший рівень індивідуального рейтингу (так звані "нерозрізнені об'єкти").

За нерозрізненості об'єктів матриця ймовірностей R спроститься до вектора-стовпчика R' :

$$R' = \begin{pmatrix} P_1 \\ \dots \\ P_i \\ \dots \\ P_n \end{pmatrix}.$$

Тобто кожний j -тій об'єкт ($j = \overline{1, N}$) матиме однаково ймовірність $P_{ij} = P_i$ потрапляння до i -того рівня рейтингової шкали ($i = \overline{1, n}$).

У такому разі для присвоєння певного рівня узагальненого кредитного рейтингу нас цікавитиме інформація не про окремі об'єкти, а лише про кількість об'єктів, що отримали ті чи інші індивідуальні рейтинги.

Таким чином, кількість комбінацій розподілу N -нерозрізнених, неупорядкованих об'єктів рейтингування за n -розрізненими рівнями рейтингової шкали дорівнюватиме:

$$L(n, N) = C_{n+N-1}^N = \frac{(n+N-1)!}{(n-1)! N!} \quad (3)$$

Порівнюючи формули (2) та (3), можемо констатувати, що множина елементарних подій $\{\Omega\}$ щодо можливих результатів рейтингування об'єктів у разі їхньої нерозрізненості матиме набагато меншу потужність, що суттєво спростуватиме обчислення.

УМОВНИЙ ПРИКЛАД

Для кращого пояснення введених дефініцій розглянемо умовний приклад. Нехай рейтингова шкала складається лише з трьох основних рівнів (таке укрупнення на практиці можливе, наприклад, при поділі всіх рейтингів на три категорії кредитної якості: першокласні, звичайні та аутсайдерські об'єкти), а множина об'єктів рейтингування складається лише з чотирьох підприємств, які входять до фінансово-промислової групи. Розв'яжемо комбінаторну задачу розподілу підприємств за рівнями рейтингу.

Відповідно до введених позна-

чень, маємо: $n = 3, N = 4$. Тоді, за умови розрізненості об'єктів, загальна кількість варіантів сполучень за формулою (2) дорівнює: $n^N = 81$, тобто перебирати їх всі вручну недоцільно.

За спрощення задачі шляхом прийняття припущення про нерозрізненість об'єктів кількість комбінацій підприємств за рівнями рейтингової шкали згідно з формулою (3) становитиме 15 варіантів. Усі вони наведені у таблиці.

Необхідно наголосити, що присвоєння узагальненого кредитного рейтингу є *об'єктивним* та *однозначним* лише у разі, якщо всі об'єкти рейтингування отримали однаковий рівень індивідуального кредитного рейтингу H_i . Загалом, за умови прийняття гіпотези про незалежність подій визначення індивідуальних рейтингів, ймовірність $P(H_i)$ *об'єктивного* присвоєння узагальненого кредитного рейтингу рівня H_i визначається за формулою:

$$\forall i: P(H_i) = P_i^N \quad (4)$$

Так у наведеному прикладі, відповідно до даних таблиці, об'єктивно присвоїти узагальнений кредитний рейтинг групі об'єктів можна лише у разі реалізації варіантів № 1, № 11 або № 15. Тоді, наприклад, ймовірність об'єктивного присвоєння узагальненого рейтингу першого рівня за формулою (4) дорівнюватиме: $P(H_1) = P_1^4$.

В усіх інших випадках узагальнений рейтинг є *суб'єктивним* та залежить від прийнятої системи експертних правил, які певним чином розділяють всю множину $\{\Omega\}$ на декілька підмножин S_i , кожна з яких відповідає певному рівню узагальненого рейтингу H_i .

Отже, присвоєння узагальненого рейтингу першого рівня також можливе за прийняття певного експертного правила. На нашу думку, для наведеного прикладу цілком логічним буде правило, що найвищий узагальнений рейтинг H_1 можна присвоїти групі об'єктів, якщо не менше, ніж три нерозрізнені підприємства з чотирьох мають індивідуальний рейтинг H_1 . У таблиці цьому експертному правилу відповідає підмножина S_1 , яка містить варіанти № 1–3. Тоді, відповідно до прийнятого експертного правила, для оцінювання ймовірності присвоєння узагальненого кредитного рейтингу рівня 1 необхідно скласти ймовірності реалізації несумісних подій, що входять у підмножину S_1 . Отримаємо: $P(H_1) = P_1^4 + P_1^3 \times P_2 + P_1^3 \times P_3$.

Тобто ймовірність $P(H_1)$ включає також ймовірність об'єктивного присвоєння узагальненого рейтингу $P(H_1)$ та ймовірності реалізації близьких до неї варіантів № 2–3.

Аналогічно, задавши певні експертні правила, можемо розрахувати й ймовірності $P(H_2)$ та $P(H_3)$.

Зазначимо, що за нерозрізненості об'єктів рейтингування всі варіанти їхніх сполучень за рівнями рейтингу відрізнятимуться лише кількістю об'єктів, що потрапили до певних рівнів рейтингової шкали. Загалом можна встановити, що k_1 об'єктів віднесено до рівня 1, k_2 об'єктів – до рівня 2, та, нарешті, k_n об'єктів – до рівня рейтингу n , за виконання умов: $\forall k_i: k_i = 0, N, i = \overline{1, n}$.

Оскільки одному об'єкту рейтингування неможливо присвоїти одночасно більше, ніж один рівень рейтингу, тобто випадкові події потрапляння індивідуального рейтингу об'єкта до того чи того рівня рейтингової шкали є взаємовиключними, а загальна кількість присвоєних індивідуальних рейтингів дорівнює кількості об'єктів рейтингування, то правильною є умова:

$$\sum_{i=1}^n k_i = N \quad (5)$$

За умови відомого розподілу величин k_i ймовірність реалізації будь-якого з варіантів сполучень N -нерозрізнених об'єктів за n -розрізненими рівнями рейтингової шкали за виконання умови (5) визначатиметься за формулою:

$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = P_1^{k_1} \cdot P_2^{k_2} \cdot \dots \cdot P_n^{k_n} \quad (6)$$

Підкреслимо, що вираз (4) є лише окремим випадком формули (6).

За прийнятої системи експертних правил, які визначенням чином розділяють всю множину $\{\Omega\}$ на декілька підмножин S_i ($i = \overline{1, n}$), для обчислення ймовірності присвоєння певного рівня узагальненого рейтингу H_i достатньо скласти лише ті з розрахованих за формулою (6) ймовірностей реалізації окремих варіантів, які входять до відповідної підмножини.

УВЕДЕННЯ ОБМЕЖЕНЬ, СПРЯМОВАНИХ НА ЗМЕНШЕННЯ ПОТУЖНОСТІ МНОЖИНИ ВАРІАНТІВ РОЗПОДІЛУ ІНДИВІДУАЛЬНИХ КРЕДИТНИХ РЕЙТИНГІВ

Для спрощення розбиття множини елементарних подій $\{\Omega\}$ на підмножини S_i необхідно увести

додаткові обмеження, спрямовані на зменшення потужності множини варіантів розподілу індивідуальних кредитних рейтингів за рівними рейтинговою шкали.

Потужність множини елементарних подій $\{\Omega\}$ щодо можливих результатів рейтингування об'єктів за формулою (3) залежить лише від двох параметрів – кількості рівнів шкали n та кількості об'єктів N . Тому “зрізання” множини $\{\Omega\}$ може відбуватися лише за цими двома параметрами.

Так, цілком логічним є обмеження, за якого при формулюванні експертних правил щодо узагальнених кредитних рейтингів не враховують деякі рівні рейтингової шкали. Наприклад, загальноприйнятий найнижчий рівень рейтингової шкали, який позначається літерою “D” та означає “дефолт”, майже ніколи не присвоюється відразу, а є результатом дій позичальника на ринку. Отже, виключення цього рівня рейтингу із загальної матриці варіантів сполучень індивідуальних кредитних рейтингів за рівнями рейтингової шкали є можливим.

Загалом, за виключенням r рівнів рейтингової шкали із сукупної кількості n рівнів, потужність множини елементарних подій $\{\Omega\}$ щодо можливих результатів рейтингування об'єктів визначатиметься за формулою:

$$L(n-r, N) = C_{n+N-r-1}^N = \frac{(n-r+N-1)!}{(n-r-1)! N!} \cdot (7)$$

Інший варіант обмежень для великої вибірки – не враховувати частину гомогенних об'єктів рейтингування. Так, за умови виключення m об'єктів із сукупності з N об'єктів, потужність множини $\{\Omega\}$ дорівнюватиме:

$$L(n, N-m) = C_{n+N-m-1}^{N-m} = \frac{(n+N-m-1)!}{(n-1)! (N-m)!} \cdot (8)$$

Останній варіант обмежень – одночасне “зрізання” r рівнів рейтингової шкали та m об'єктів рейтингування. Тоді потужність множини $\{\Omega\}$ визначатиметься так:

$$L(n-r, N-m) = C_{n+N-r-m-1}^{N-m} = \frac{(n+N-r-m-1)!}{(n-r-1)! (N-m)!} \cdot (9)$$

Таким чином, упродовжені експертні правила та додаткові обмеження дають змогу визначити ймовірності $P(H_i)$ присвоєння узагальнених кредитних рейтингів для групи гомогенних об'єктів.

Далі, пам'ятаючи, що важливість кредитних рейтингів насамперед полягає в тому, що вони дають змогу оцінити ймовірності дефолтів, скористаємося результатами, отрима-

ними у попередній праці [5].

Відкалібрована рейтингова шкала передбачає, що для кожного з рівнів рейтингу H_i відомі максимальні граничні значення ймовірності дефолтів α_i , або за формулою:

$$\forall i: H_i \exists \alpha_i, \alpha_i \in [0;1].$$

Тоді, як викладено в статті автора [4], максимальна ймовірність дефолту $P(A)$ дорівнюватиме:

$$\max(P(A)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \times P(H_i), \quad (10)$$

де α_i – максимальна ймовірність дефолту об'єкта за умови, що його рейтинг належить до рівня H_i національної шкали.

Відповідно до рівняння (10), знаючи ймовірності $P(H_i)$, присвоєння кожного з узагальнених кредитних рейтингів та максимальні граничні значення ймовірностей дефолту α_i , завжди можемо розрахувати значення ймовірності дефолту для групи гомогенних об'єктів рейтингування.

У свою чергу, розрахована за формулою (10) ймовірність дефолту є важливою кількісною оцінкою ступеня кредитного ризику. Такий кількісний показник є одним з основних критеріїв прийняття інвестиційних рішень та, у даному випадку, дає змогу оцінити інвестиційну привабливість одразу для певної сукупності об'єктів.

ВИСНОВКИ

Нашу думку, наведені в статті ймовірнісні моделі можуть становити не лише науковий, а й значний практичний інтерес при оцінюванні інвестиційної привабливості та кредитної якості таких складних об'єктів рейтингування, як певні галузі промисловості, сектори економіки та сегменти ринку, а також

регіональні, муніципальні та інші територіальні об'єднання суб'єктів господарювання тощо.

Важливість вирішення цієї задачі акцентує прийнята Кабінетом Міністрів України “Концепція створення системи рейтингової оцінки регіонів, галузей національної економіки, суб'єктів господарювання” [1], яка, на жаль, не містить конкретних кількісних показників. Певним кроком до заповнення цього пробілу є наше дослідження, в якому розглянуто економіко-математичні аспекти рейтингування та кредитні рейтинги в дефініціях теорії ймовірностей. □

Література

1. Розпорядження Кабінету Міністрів України “Про схвалення Концепції створення системи рейтингової оцінки регіонів, галузей національної економіки, суб'єктів господарювання” від 1.04.2004 р. № 208-р.
2. Закон України “Про державне регулювання ринку цінних паперів України” від 30.10.1996 р. № 448/96-ВР.
3. Постанова Кабінету Міністрів України “Про затвердження Національної рейтингової шкали” від 26.04.2007 р. № 665.
4. Долінський Л.Б. Рейтингування інститутів та інструментів фінансового ринку: правові аспекти // Цінні папери України. – № 47 (589). – 26.11.2009 р. – С. 28–30.
5. Долінський Л.Б. Моделювання кредитних рейтингів за національною та міжнародною рейтинговими шкалами // Вісник Національного банку України. – 2010. – № 10. – С. 50–54.
6. Долінський Л.Б. Моделювання узагальненого кредитного рейтингу для групи об'єктів рейтингування // Вісник Національного банку України. – 2011. – № 4. – С. 23–27.



Вже стелить осінь пелену туману.
Фото Леоніда Мілевського.